TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

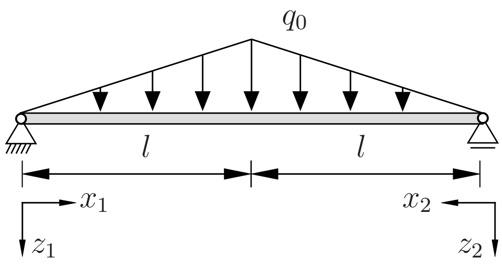
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)
Der wie dargestellt gelagerte Balken wird durch eine linear verlaufende Streckenlast (Maximalwert q_0) belastet. Es wird angenommen, dass der Balken die, über die Länge variierenden, Elastizitätsmoduli $E(x_1) = 2\,E_0\,x_1/l$ und $E(x_2) = 2\,E_0\,x_2/l$ und das konstante Flächenträgheitsmoment I_y besitzt. Die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen. Die zugehörige Funktion des Biegemoments lautet



$$M(x_1) = \frac{q_0}{6\,l}x_1^3 - \frac{q_0\,l}{2}x_1 \quad \text{für} \quad 0 \le x_1 < l.$$

Geben Sie die kinematischen (geometrischen) Rand- und Übergangsbedingungen an, die zur vollständigen Bestimmung der Biegelinie $w(x)$ erforderlich sind. **(1,0 Punkte)**

$$w_1(x_1 = 0) = 0$$
$$w_2(x_2 = 0) = 0$$
$$w_1(x_1 = l) = w_2(x_2 = l)$$
$$\frac{\mathrm{d}w_1(x_1 = l)}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\mathrm{d}w_2(x_2 = l)}{\mathrm{d}x_1}$$

Berechnen Sie die Funktion der Biegelinie $w_1(x_1)$ für $0 \le x_1 < l$ für das gegebene System inklusive der Bestimmung aller Integrationskonstanten. Tragen Sie die wichtigsten Zwischenschritte sowie das Ergebnis in das nachfolgende Kästchen ein. **(4,0 Punkte)**

$$I_y w_1''(x_1) = -\frac{M(x_1)}{E(x_1)} = -\left(\frac{q_0}{12\,E_0}x_1^2 - \frac{q_0\,l^2}{4\,E_0}\right)$$
$$I_y w_1'(x_1) = -\left(\frac{q_0}{36\,E_0}x_1^3 - \frac{q_0\,l^2}{4\,E_0}x_1\right) + C_1$$
$$I_y w_1(x_1) = -\left(\frac{q_0}{144\,E_0}x_1^4 - \frac{q_0\,l^2}{8\,E_0}x_1^2\right) + C_1\,x + C_2$$

Rand- und Übergangsbedingungen

$$w_1(x_1 = 0) = 0 \to C_2 = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}w_1(x_1 = l)}{\mathrm{d}x_1} = 0 \to C_1 = \frac{-2\,q_0\,l^3}{9\,E_0}$$

$$w_1(x_1) = \frac{1}{I_y}\left(-\frac{q_0}{144\,E_0}x_1^4 + \frac{q_0\,l^2}{8\,E_0}x_1 - \frac{2\,q_0\,l^3}{9\,E_0}x_1\right)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

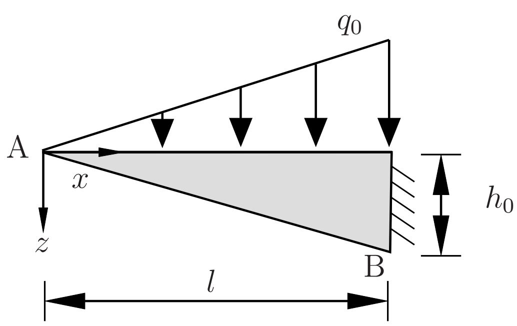
b)
Für ein anderes System sei die Biegelinie zu

$$w(x) = \frac{1}{E\,I_y}\left(\frac{q_0}{6\,l}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x\,l}{5}\right) + \frac{7\,q_0\,l}{50}\right)$$

bestimmt worden. Wie groß sollte das Flächenträgheitsmoment I_y sein, damit die maximale Durchbiegung des Balkens den kritischen Wert w_{krit} nicht übersteigt? (**1,0 Punkte**)

$$\boxed{I_y > \frac{1}{E\,w_{\text{krit}}}\left(\frac{2\,q_0\,l}{15}\right)}$$

c)
Der abgebildete Träger hat die konstante Dicke t, den Elastizitätsmodul E und an der Einspannung die vorgegebene Höhe h_0. Begründen Sie, für welche der folgenden Längenwerte l die Durchbiegung am äußeren Punkt A minimal wird.



1. $l = 10\,h_0$
2. $l = 15\,h_0$
3. $l = 20\,h_0$

(**1,0 Punkte**)

Die minimale Durchbiegung kann mit dem maximalen Trägheitsmoment erreicht werden.

$h(x) = \frac{h_0}{l}x$

$I(x) \approx [h(x)]^3 \rightarrow \max\left(\frac{h_0}{l}x^3\right) \rightarrow \frac{h_0}{l} = \frac{1}{10}$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

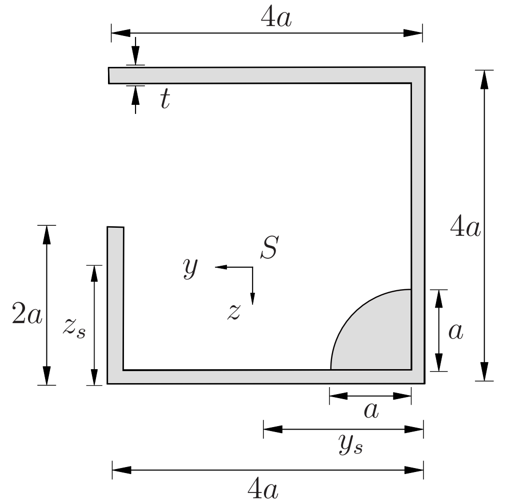
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

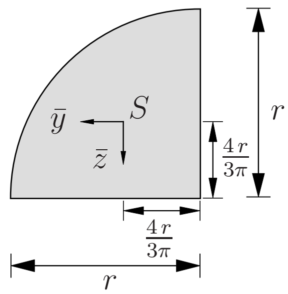
Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

d)
Gegeben ist das Profil eines dünnwandigen Trägers, welches durch ein Viertel eines Zylinders (Radius a) verstärkt wurde. Der Träger besitzt eine konstante Profildicke $t \ll a$. Der Schwerpunkt S des Trägers sei bekannt und durch die Abstände y_S und z_S gegeben. Die weiteren Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen.



Hinweis: Die Flächenträgheitsmomente für einen wie folgt dargestellten Viertelkreis sind:

$$I_{\bar{y}} = \frac{\pi r^4}{16}, \quad I_{\bar{z}} = \frac{\pi r^4}{16}$$



Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment I_y des Trägers mit Verstärkung bezüglich des gegebenen y, z-Schwerpunktkoordinatensystems. Nutzen Sie aus, dass $t \ll a$ gilt. Fassen Sie die Terme nicht zusammen. **(3,0 Punkte)**

$$\boxed{I_y = \frac{(4\,a)^3\,t}{12} + \frac{(2\,a)^3\,t}{12} + \frac{\pi\,a^4}{16} + (2\,a\,t)\,(a - z_S)^2 + (4\,a\,t)\,(a - z_S)^2 + \frac{\pi\,a^2}{4}\left(\frac{4\,a}{3\,\pi} - z_S\right)^2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

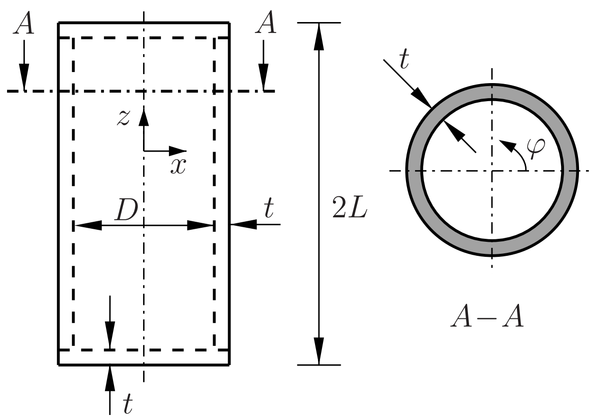
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 5)

Die nebenstehende Skizze zeigt ein vereinfachtes Modell einer Getränkedose. Die Dose hat die Form eines dünnwandigen Hohlzylinders mit Innendurchmesser D, Höhe $2L$ und Wandstärke t ($t \ll D, L$). Das Material der Dose weist einen Elastizitätsmodul E, eine Querkontraktionszahl ν und einen thermischen Ausdehnungskoeffizienten α_T auf. Das Materialverhalten kann mit einem isotropen, linearen Materialmodell beschrieben werden.



a)
Es wird nun angenommen, dass die betrachtete Getränkedose vollständig gefüllt ist, sodass im Inneren der Dose ein hydrostatischer, aber unbekannter Druck p_i herrscht. Für diese Belastungssituation sei jedoch bekannt, dass die Axialspannung in der Mantelfläche der Dose σ_z beträgt. Bestimmen Sie den Betrag des Innendrucks in der Dose in Abhängigkeit von σ_z. Geben Sie anschließend die Spannung σ_φ in Umfangsrichtung der Mantelfläche in Abhängigkeit von σ_z an. **(1,0 Punkte)**

$$p_i(\sigma_z) = \sigma_z \, \frac{4\,t}{D}$$

$$\sigma_\varphi(\sigma_z) = 2\,\sigma_z$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

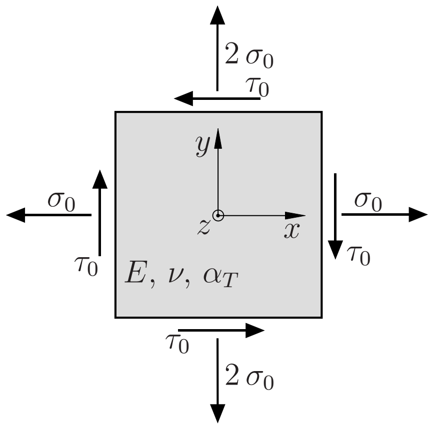
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 5)

b)
Im Folgenden wird ein Bauteil betrachtet, das aus dem gleichen Material besteht wie die Dose in Aufgabenteil a). In der nebenstehenden Skizze ist ein ebener Spannungszustand skizziert, welcher die vorliegende Materialbelastung in dem Bauteil beschreibt. Geben Sie den zugehörigen Spannungstensor bezogen auf das vorgegebene Koordinatensystem an. (**0,5 Punkte**)



$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & -\tau_0 & 0 \\ -\tau_0 & 2\,\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Geben Sie den zugehörigen Verzerrungstensor für den Fall an, dass das Material eine gleichmäßige Abkühlung von der Umgebungstemperatur 20°C auf 8°C erfährt. Beziehen Sie die Tensorkoeffizienten auf das gegebene Koordinatensystem. (**2,0 Punkte**)

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \frac{[1-2\,\nu]}{E}\sigma_0 - 12\,K\cdot\alpha_T & \frac{-[1+\nu]}{E}\tau_0 & 0 \\ \frac{-[1+\nu]}{E}\tau_0 & \frac{[2-\nu]}{E}\sigma_0 - 12\,K\cdot\alpha_T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3\,\nu}{E}\sigma_0 - 12\,K\cdot\alpha_T \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

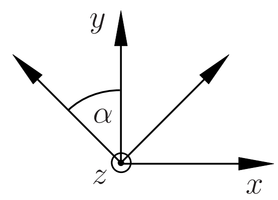
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 5)

c)
In einem anderen System sei der ebene Spannungszustand

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 2\,\tau_0 & 0 \\ 2\,\tau_0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in Bezug auf das in der nebenstehenden Skizze dargestellte x, y, z-Koordinatensystem bekannt.



Unter einem Winkel von $\alpha = 45°$ zur y-Achse (in der x, y-Ebene) wurde eine Normalspannung von $\frac{3}{2}\,\sigma_0$ ermittelt. Geben Sie auf Grundlage dieser Information das Verhältnis $\frac{\sigma_0}{\tau_0}$ zwischen Normal- und Schubspannung im Material an. **(1,5 Punkte)**

$$\frac{\sigma_0}{\tau_0} = -4$$

Es sei bekannt, dass für das betrachtete Material Schubspannungen als kritische Belastung anzusehen sind. Unter welchem Winkel α_{krit} zur y-Achse (in der x, y-Ebene) würde das Material auf Grundlage dieser Annahme als erstes versagen? **(1,0 Punkte)**

$\alpha_{\text{krit}} = 0$ oder $\alpha_{\text{krit}} = \pi/2$

TU Dortmund
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

d)
Für ein anderes System wurde ein Spannungstensor bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem mit Koordinaten x, y, z zu

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = 2\,\frac{E\,\hat{u}}{l^2}\begin{bmatrix} \mathcal{A}\,x + \mathcal{B}\,y + \mathcal{C}\,z & 0 & 2\,z \\ 0 & \mathcal{A}\,x + [\mathcal{A}+\mathcal{B}]\;y + \mathcal{C}\,z & 0 \\ 2\,z & 0 & 3\,\mathcal{A}\,x + \frac{[\mathcal{B}+1]}{2}\,y + 3\,\mathcal{C}\,z \end{bmatrix}$$

bestimmt. Das System sei mit einer Volumenkraft von

$$\boldsymbol{f} = -\frac{E\,\hat{u}}{l^2}\,[8\,\boldsymbol{e}_x + 30\,\boldsymbol{e}_y + 12\,\boldsymbol{e}_z]$$

belastet. Die Abmessung l, die Verschiebung $\hat{u}$ und der Elastizitätsmodul E des Materials sind dabei bekannt.
Berechnen Sie die unbekannte Konstanten $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, sodass in dem beschriebenen Zustand Gleichgewicht herrscht. Tragen Sie die wichtigsten Zwischenschritte in das nachfolgende Kästchen ein. **(2,5 Punkte)**

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\,\frac{E\,\hat{u}}{l^2}\begin{bmatrix}\mathcal{A}+2\\ \mathcal{A}+\mathcal{B}\\ 3\,\mathcal{C}\end{bmatrix} - \frac{E\,\hat{u}}{l^2}\begin{bmatrix}8\\30\\12\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\begin{bmatrix}\mathcal{A}+2\\ \mathcal{A}+\mathcal{B}\\ 3\,\mathcal{C}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\30\\12\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = 2, \quad \mathcal{B} = 13, \quad \mathcal{C} = 2$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 5 von 5)

e)
Der zugehörige Verzerrungszustand zu Aufgabenteil d) sei als

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{x,y,z} = \frac{\hat{u}}{l^2} \begin{bmatrix} 3\,y & 0 & z \\ 0 & 4\,y & 0 \\ z & 0 & 2\,x + 2\,z \end{bmatrix}$$

bekannt. Überprüfen Sie anhand einer Rechnung, ob aus dem Verschiebungsfeld

$$\boldsymbol{u}^*(x,y,z) = \frac{\hat{u}}{l^2}\left[3\,x\,y\,\boldsymbol{e}_x + 2\,y^2\,\boldsymbol{e}_y + (z^2 + 2\,x\,z)\,\boldsymbol{e}_z\right]$$

dieser Verzerrungszustand folgt. **(1,5 Punkte)**

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^*]_{x,y,z}\,(\boldsymbol{u}^*) = \frac{\hat{u}}{l^2} \begin{bmatrix} 3\,y & 1,5\,x & z \\ 1,5\,x & 4\,y & 0 \\ z & 0 & 2\,x + 2\,z \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Nein, da die x,y- und y,x-Komponenten nicht übereinstimmen.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

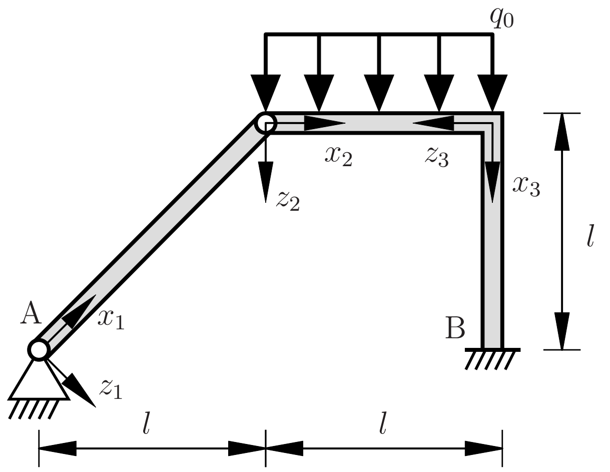
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

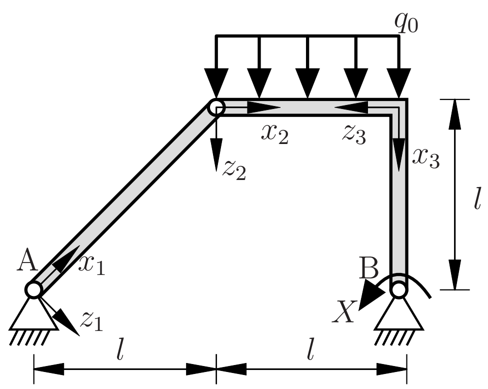
Aufgabe 3 (Seite 1 von 5)

a)
Das untenstehende, statisch unbestimmte Rahmensystem (Biegesteifigkeit EI, Dehnsteifigkeit EA) ist durch eine konstante Streckenlast mit dem Betrag q_0 belastet. Die Lagerung des Rahmens ist der Skizze zu entnehmen.



Zeichnen Sie das statisch bestimmte Ersatzsystem, welches sich ergibt, wenn die Einspannung in B durch ein Festlager sowie ein Moment X ersetzt wird. Geben Sie zudem die Kompatibilitätsbedingung an, welche sich im Lager B ergibt. Nutzen Sie dafür die vorgegebene Koordinate x_3 für den rechten Rahmenabschnitt. Die zugehörige Biegelinie sei mit $w_3(x_3)$ bezeichnet. **(1,0 Punkte)**

Skizze:



Kompatibilitätsbedingung: $w_3'(x_3 = l) = 0$

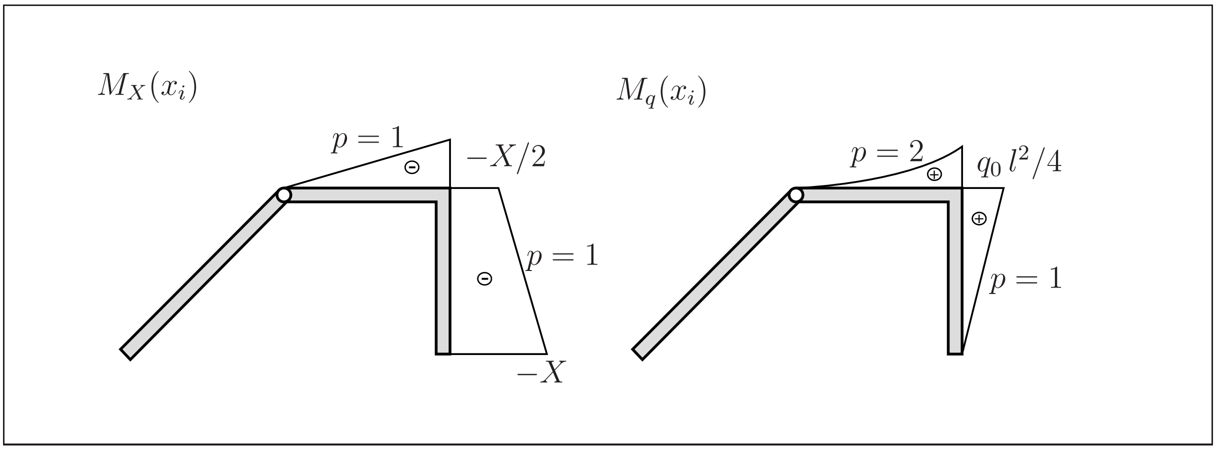
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

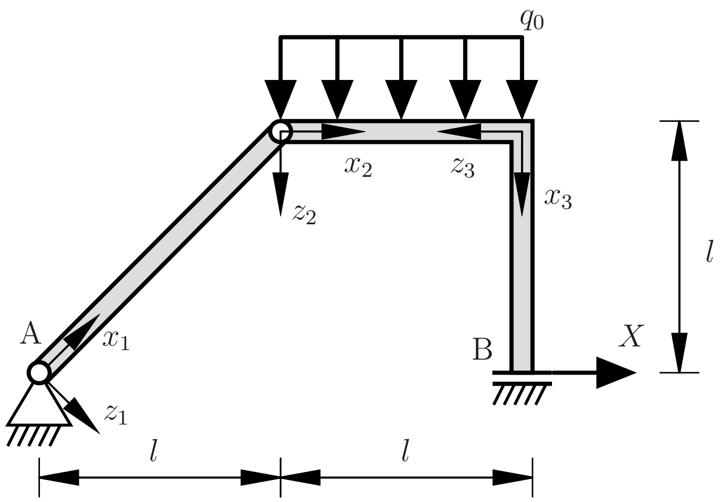
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 5)

Zeichnen Sie die Biegemomentenverläufe M_X ($q_0 = 0$) und M_q ($X = 0$) des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme. Geben Sie dabei charakteristische Werte und die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen mit an. **(2,0 Punkte)**



b)
Ein alternatives Ersatzsystem ist in der untenstehenden Abbildung dargestellt. Beiträge aus Schubverformung sind zu vernachlässigen.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 5)

Die Funktionen der Normalkräfte und Biegemomente sind für dieses System wie folgt vorgegeben:

in Abhängigkeit von X für $q_0 = 0$:

$$N_X(x_1) = \sqrt{2}\,X$$
$$N_X(x_2) = X$$
$$N_X(x_3) = -X$$

$$M_X(x_1) = 0$$
$$M_X(x_2) = X\,x_2$$
$$M_X(x_3) = X\,[l + x_3]$$

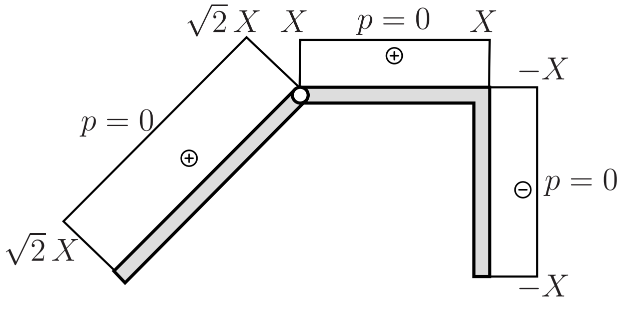
in Abhängigkeit von q_0 für $X = 0$:

$$N_q(x_1) = 0$$
$$N_q(x_2) = 0$$
$$N_q(x_3) = -q_0\,l$$

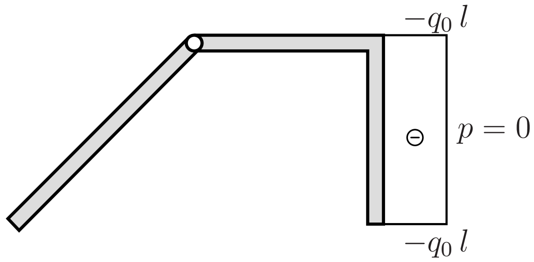
$$M_q(x_1) = 0$$
$$M_q(x_2) = -\tfrac{1}{2}\,q_0\,x_2^2$$
$$M_q(x_3) = -\tfrac{1}{2}\,q_0\,l^2$$

Die grafische Darstellung der Verläufe ergibt sich zu:

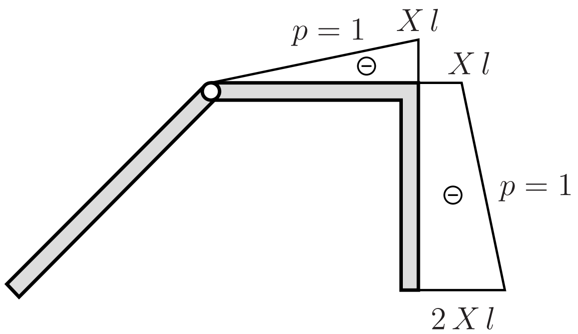
$N_X(x_i)$



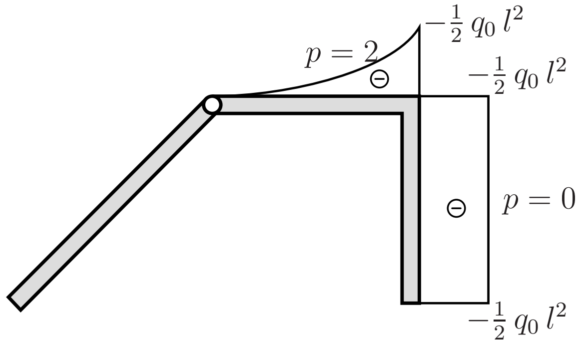
$N_q(x_i)$



$M_X(x_i)$



$M_q(x_i)$



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 5)

Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X. Geben Sie dabei die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis an. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig nachvollziehbar dargestellt wird. Die Ergebnisse sollen **nicht** vereinfacht werden. **(4,0 Punkte)**

$$X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}$$

$$\alpha_{10} = \frac{1}{EA}\left[q_0\, l^2\right] + \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{8}\,q_0\, l^4 - \frac{3}{4}\,q_0\, l^4\right]$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{EA}\left[2\sqrt{2}\, l + l + l\right] + \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\, l^3 + \frac{7}{3}\, l^3\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

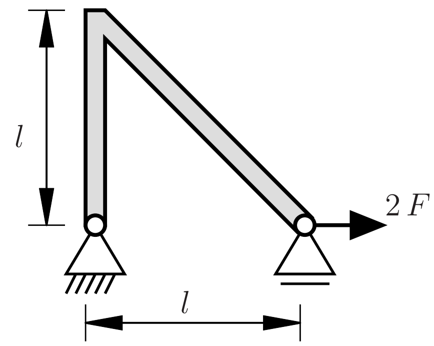
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 5 von 5)

c)
Der dargestellte, dehnstarre Rahmen ($EA \to \infty$) ist wie dargestellt gelagert und weist die Biegesteifigkeit EI auf. Am rechten Ende wird der Balken durch eine Einzelkraft $2\,F$ belastet.



Bestimmen Sie die im dargestellten System gespeicherte Formänderungsenergie Π in Abhängigkeit der gegebenen Größen. Beiträge aus Schubverformung sind zu vernachlässigen.
(2,0 Punkte)

$$\Pi = \frac{1}{2}\,\frac{1}{EI}\left[\frac{4}{3}\,F^2\,l^3 + \frac{4\,\sqrt{2}}{3}\,F^2\,l^3\right]$$

Bestimmen Sie den Betrag u_F, um welchen sich der Endpunkt des Rahmens in Richtung der Einzelkraft verschiebt.
(1,0 Punkte)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial [2F]} = \left[\frac{2}{3} + \frac{2\,\sqrt{2}}{3}\right]\,\frac{F\,l^3}{EI}$$