Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

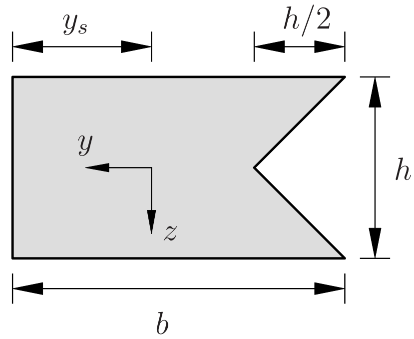
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Gegeben ist das dargestellte Profil mit Abmessungen b, h und einer dreiecksförmigen Aussparung der Höhe $h/2$.

Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment I_y bezüglich des gegebenen y-z-Schwerpunktskoordinatensystems. Fassen Sie die einzelnen Terme **nicht** zusammen. (**1,5 Punkte**)

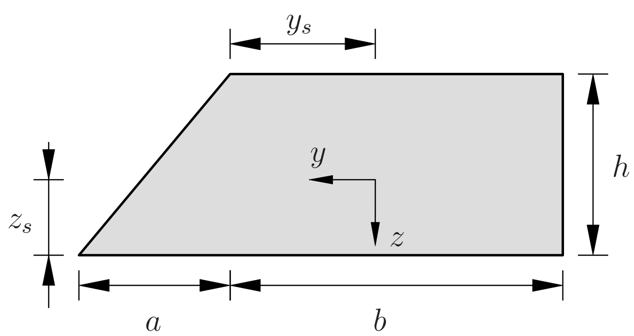


$$I_y = \frac{b\,h^3}{12} - 2\,\frac{h^4}{576} - 2\,\frac{h^2}{8}\left[\frac{h}{6}\right]^2$$

b)

Betrachten Sie nun das Profil mit einer Abschrägung der Breite a.

Bestimmen Sie das Deviationsmoment I_{yz} bezüglich des gegebenen y-z-Schwerpunktskoordinatensystems. Fassen Sie die einzelnen Terme **nicht** zusammen. (**1,5 Punkte**)



$$I_{yz} = -\frac{a^2\,h^2}{72} - [y_s + \frac{1}{3}\,a]\,[z_s - \frac{1}{3}\,h]\,\frac{1}{2}\,a\,h$$
$$-[\frac{b}{2} - y_s]\,[\frac{h}{2} - z_s]\,b\,h$$

Hinweis: Flächenträgheitsmomente für ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten g und h und der y-Achse parallel zur Grundseite g:

$$I_y = \frac{g\,h^3}{36}\,, \qquad I_z = \frac{h\,g^3}{36}\,, \qquad I_{yz} = -\frac{g^2\,h^2}{72}\,.$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

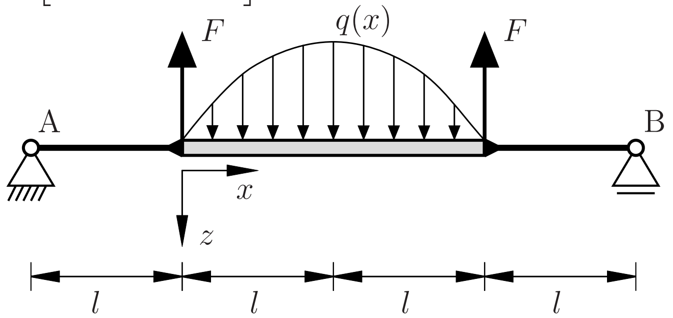
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

c)

An dem unten abgebildeten Balken (Biegesteifigkeit EI) sind an jeder Seite biegestarre Stangen angeschweißt und wie dargestellt gelagert. Auf den Balken wirkt eine quadratische Streckenlast $q(x) = q_0 \left[1 - [x/l - 1]^2\right]$ sowie zwei Einzelkräfte $F = [2/3]\, q_0\, l$.



Bestimmen Sie den Biegemomentenverlauf $M(x)$ des Balkens bezüglich des vorgegebenen lokalen Koordinatensystems. Die Lagerreaktionen wurden bereits zu $A_x = 0$, $A_y = 0$ und $B = 0$ berechnet. **(1,5 Punkte)**

$$M(x) = -q_0 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{12}\left[\frac{x}{l} - 1\right]^4\right] + q_0\, l\, x - \frac{1}{12}\, q_0\, l^2$$

Geben Sie nun die bestimmende DGL für die Biegelinie $w(x)$ des Balkens an. (**0,5 Punkte**)

DGL: $w''(x) = -\dfrac{1}{EI}\, M(x)$

d)

Bei dem System aus Aufgabenteil c) wird der Balken nun nur noch mit einer **konstanten** Streckenlast q_0 belastet ($F = 0$). Daraus ergibt sich die Biegelinie

$$EI\, w(x) = -q_0\, \frac{x^4}{24} - q_0\, l\, \frac{x^3}{6} - q_0\, l\, \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}\, q_0\, x\, l^3 + \frac{5}{3}\, q_0\, l^4\,.$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

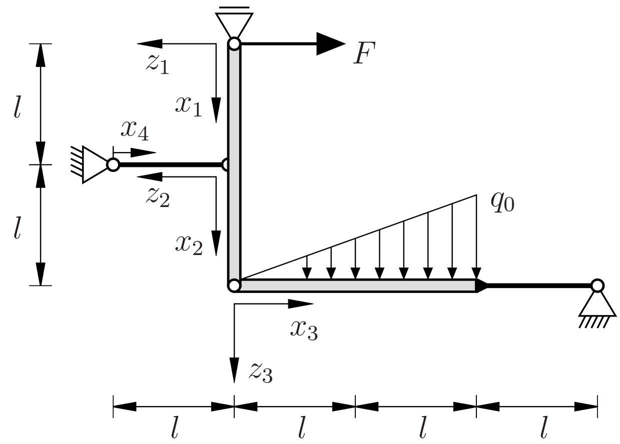
Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

Bestimmen Sie die maximale Streckenlast q_0 so, dass die maximale Durchbiegung der Biegelinie $w(x)$ den Betrag δ nicht überschreitet. **(1,0 Punkte)**

$$q_0 \leq \frac{8\,\delta\,EI}{21\,l^4}$$

e)

Das nebenstehende System besteht aus zwei gelenkig verbundenen dehnstarren Balken (Längen $2\,l$, Biegesteifigkeiten EI). Der senkrechte Balken ist mittig mit einer Pendelstütze verbunden. Der waagrechte Balken ist am rechten Ende fest mit einem **starren** Stab verschweißt und über diesen gelagert. Das System ist durch die Einzelkraft F sowie die linear veränderliche Streckenlast (Maximalwert q_0) belastet. Die Funktion $u_4(x_4)$ zur Beschreibung der Ausdehnung der Pendelstütze sei bekannt.



Geben Sie alle **kinematischen** Rand- und Übergangsbedingungen an, die zur Bestimmung der Biegelinien $w_i(x_i)$ des Gesamtsystems erforderlich sind. Kennzeichnen Sie die zugehörigen Bereiche eindeutig mit den entsprechenden Indizes. **(3,0 Punkte)**

$w_2(x_2 = 0) = -u_4(l) = w_1(x_1 = l)$
$w_2(x_2 = l) = 0$
$w_3(x_3 = 0) = 0$
$w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0)$
$w_3(x_3 = 2\,l) = -l\,w_3'(x_3 = 2\,l)$

Für die Biegelinie $w_2(x_2)$ wurde der Ansatz $EI\,w_2(x_2) = \frac{1}{6}\,F\,[x_2 - l]^3 + C_1\,x_2 + C_2$ ermittelt. Bestimmen Sie die Konstanten C_1 und C_2. **(1,0 Punkte)**

$$C_1 = -\frac{1}{6}\,F\,l^2 + u_4(l)\,\frac{EI}{l}$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\,F\,l^3 - u_4(l)\,EI$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

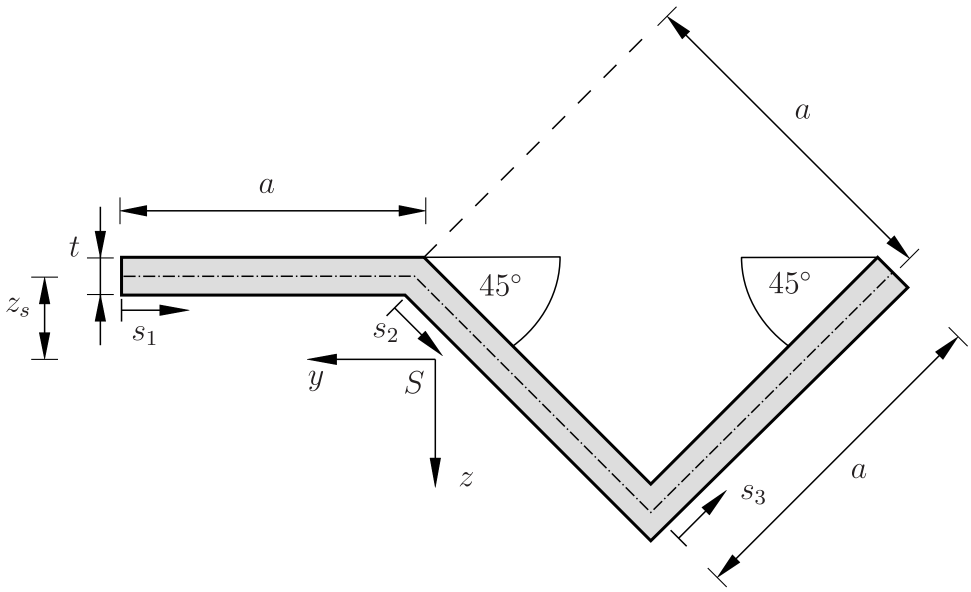
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)

Betrachtet wird ein als masselos anzunehmendes dünnwandiges Profil ($t \ll a$). Die Abmessungen des Querschnitts sind der Abbildung zu entnehmen. Der Abstand z_s des horizontalen Segments zum Schwerpunkt S und das Flächenträgheitsmoment I_y sind als bekannt anzunehmen.



Bestimmen Sie die statischen Momente der Teilbereiche $S_y(s_1)$ und $S_y(s_2)$. Fassen Sie die Ergebnisse **nicht** zusammen. **(2,0 Punkte)**

$$S_y(s_1) = -z_s\, s_1\, t$$

$$S_y(s_2) = -z_s\, a\, t + \left[-z_s + \frac{s_2}{2\sqrt{2}}\right] s_2\, t$$

Die statischen Momente $S_y(s_1)$, $S_y(s_2)$ und $S_y(s_3)$ seien nun bekannt. Erklären sie kurz, wie sie die Plausibilität der Funktion $S_y(s_3)$ einfach prüfen können. **(1,0 Punkte)**

Es muss $S_y(s_3 = a) = 0$ gelten, da das statische Moment an freien Enden null ist.

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

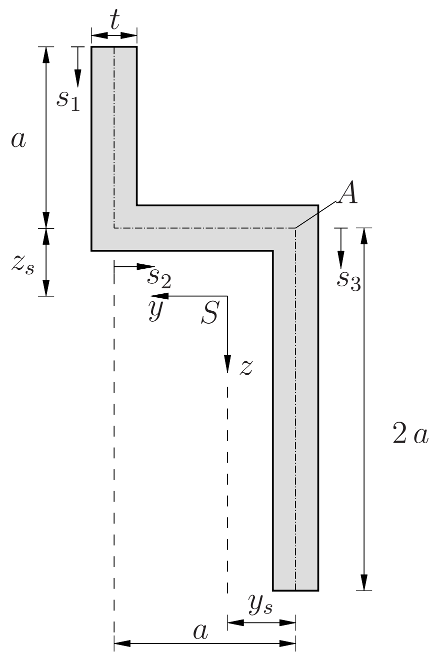
Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

b)

Das nebenstehend abgebildete als masselos anzunehmende dünnwandige Profil ($t \ll a$) wird mit einer Querkraft Q in positive z-Richtung belastet. Das statische Moment im ersten Teilbereich lautet

$$S_y(s_1) = \frac{s_1^2\,t}{2} - \frac{11}{8}\,s_1\,a\,t\,.$$

Des Weiteren sind das Flächenträgheitsmoment I_y und die Schwerpunktsabstände y_s und z_s vom Schwerpunkt S als bekannt anzunehmen.



Berechnen Sie die Lage y_m des Schubmittelpunktes bezüglich des Eckpunktes A des Profils. Stellen Sie das Vorgehen in wenigen Zwischenschritten nachvollziehbar dar.

(3,0 Punkte)

$$Q\,y_m = -\,a \int_0^a \frac{Q\,S(s_1)}{I\,t}\,t\,\mathrm{d}s_1$$

$$\Leftrightarrow \quad y_m = -\,\frac{a}{I_y}\int_0^a S(s_1)\,\mathrm{d}s_1$$

$$= -\,\frac{a}{I_y}\left[\frac{1}{6}\,s_1^3\,t - \frac{11}{16}\,s_1^2\,t\,a\right]_0^a = \frac{25}{48}\,\frac{a^4\,t}{I_y}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

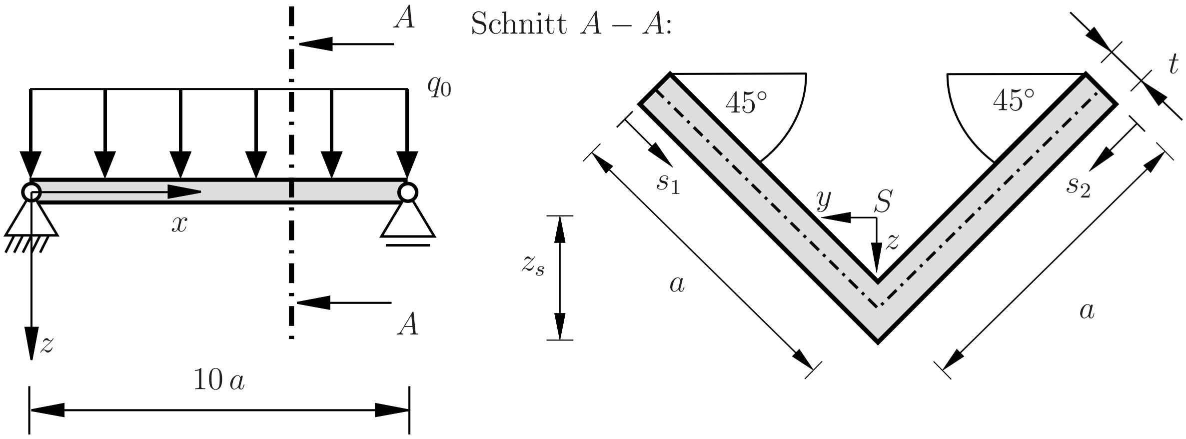
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)

Ein masseloses dünnwandiges L-Profil ($t \ll a$) der Länge $10\,a$ wird durch eine Streckenlast belastet und ist wie dargestellt gelagert. Die Abmessungen des Profils sind im Profilschnitt dargestellt.



Das Flächenträgheitsmoment des Querschnittes $I_y = t\,a^3/12$ sowie der Schwerpunktsabstand $z_s = (\sqrt{2}\,a)/4$ sind bekannt. Die Wirklinie der Streckenlast q_0 verläuft durch den Schubmittelpunkt. Die maximale Schubspannung im Profil ist bereits berechnet worden zu $\tau_{\max} = -(3\,Q(x))/(2\sqrt{2}\,t\,a)$.

An der Stelle $x = 0$ ergeben sich die Schnittgrößen zu

$$Q(x=0) = 5\,a\,q_0 \text{ und } M(x=0) = 0\,.$$

Berechnen Sie die maximale Vergleichsspannung im Querschnitt an der Stelle $x = 0$ nach der Gestaltänderungsenergiehypothese. Begründen Sie, an welcher Stelle z im Profil dieser Wert auftritt. **(2,0 Punkte)**

$$M(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx}(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{vM}(x=0) = \sqrt{3\,\tau^2}$$

$$\tau_{\max}(x=0) = -\frac{15\,a\,q_0}{2\sqrt{2}\,t\,a} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{vM}^{\max}(x=0) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{15\,q_0}{2\,t}$$

Die maximale Schubspannung tritt auf Höhe des Schwerpunkts auf, da hier das statische Moment maximal ist.

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

An der Stelle $x = 5\,a$ ergeben sich die Schnittlasten zu

$$Q(x = 5\,a) = 0 \text{ und } M(x = 5\,a) = \tfrac{25\,a^2\,q_0}{2}\,.$$

Berechnen Sie die maximale Vergleichsspannung im Querschnitt an $x = 5\,a$ nach der Gestaltänderungsenergiehypothese. Begründen Sie, an welcher Stelle z im Profil dieser Wert auftritt. **(2,0 Punkte)**

$$\sigma_{xx}(x = 5\,a) = \frac{M(x = 5\,a)}{I}\,z = \frac{150\,q_0}{t\,a}\,z\,, \quad \tau(x = 5\,a) = 0$$

Die maximale Normalspannung tritt in der äußeren Faser auf, $z = \pm a/(2\sqrt{2})$.

$$\sigma_{xx}^{\max}(x = 5\,a) = \frac{75\,q_0}{\sqrt{2}\,t} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{vM}^{\max}(x = 5\,a) = \frac{75\,q_0}{\sqrt{2}\,t}$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

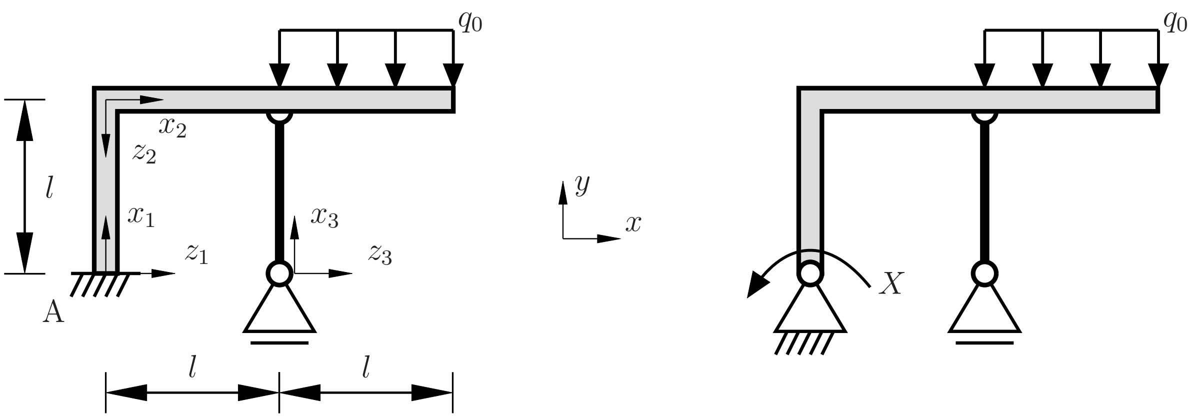
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 1 von 5)

a)

Der links abgebildete Rahmen (Biegesteifigkeit EI, Dehnsteifigkeit EA) ist wie dargestellt gelagert und belastet. Die Pendelstütze ist als **starr** anzunehmen. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit dem statisch überzähligen Auflagermoment X vorgegeben.

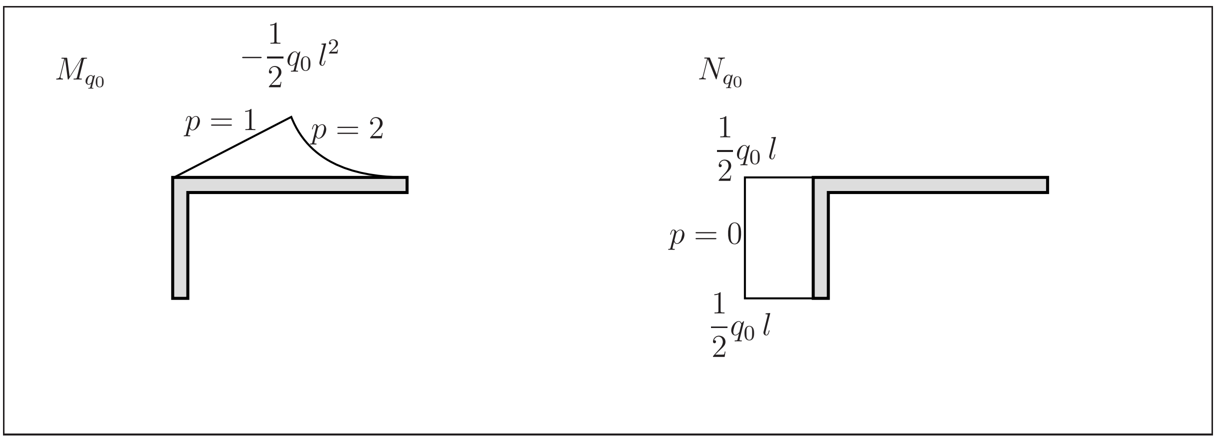
Ersatzsystem:



Für $X = 0$ ergeben sich die Lagerreaktionen im Ersatzsystem am Punkt A bezüglich der positiv definierten Koordinatenrichtungen sowie die (Zug-)Stabkraft S zu

$$A_x = 0, \qquad A_y = -\frac{1}{2}\, q_0\, l, \qquad S = -\frac{3}{2}\, q_0\, l\,.$$

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M_{q_0} und den Normalkraftverlauf N_{q_0} des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von q_0 und für $X = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen an. **(2,0 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

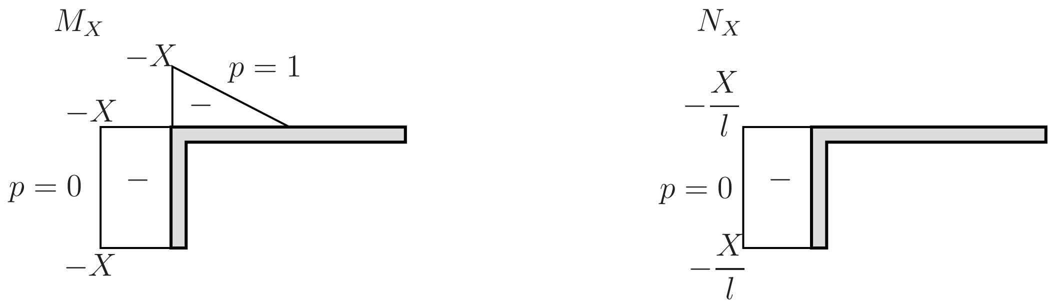
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Für $q_0 = 0$ ergeben sich die Lagerreaktionen im Ersatzsystem am Punkt A bezüglich der positiv definierten Koordinatenrichtungen sowie die (Zug-)Stabkraft S zu

$$A_x = 0, \qquad A_y = \frac{X}{l}, \qquad S = \frac{X}{l}\,.$$

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M_X und den Normalkraftverlauf N_X des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von X und für $q_0 = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen an. **(2,0 Punkte)**



Geben Sie die im System gespeicherte Gesamtenergie Π als Summe einzelner Integrale an. Geben Sie dabei die konkreten Integrationsgrenzen an und verwenden Sie die allgemeinen Ausdrücke M_{q_0}, M_X, N_{q_0} und N_X für die Schnittgrößenfunktionen. Die tatsächlichen Funktionen der Schnittgrößen sollen hier **nicht** eingesetzt werden.
Anteile aus Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen. **(1,0 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_X^2}{EI}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{[M_X + M_{q0}]^2}{EI}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_{q0}^2}{EI}\,\mathrm{d}x_2$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^l \frac{[N_X + N_{q0}]^2}{EA}\,\mathrm{d}x_1$$

TU Dortmund

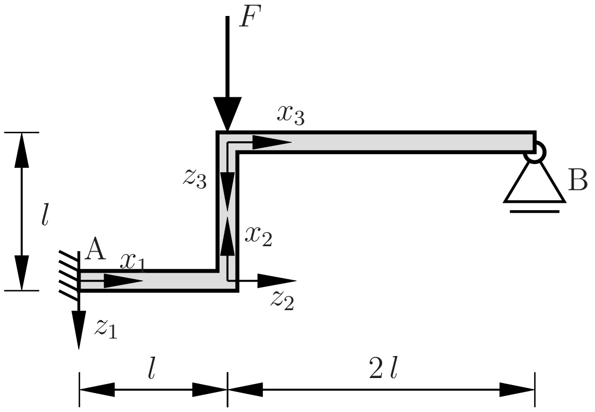
Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

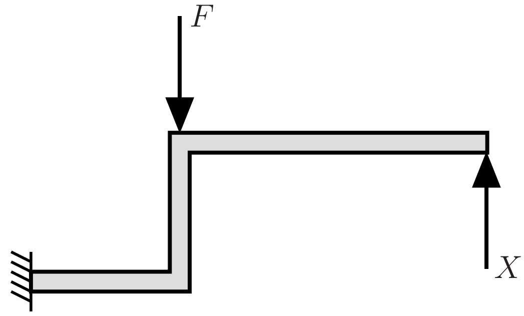
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 3 von 5)

b)
Der links abgebildete Rahmen (Dehnsteifigkeit EA, Biegesteifigkeit EI) ist wie dargestellt gelagert und belastet.
Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit der statisch überzähligen Auflagerkraft X vorgegeben. Beiträge aus Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen.



Ersatzsystem:



Die Funktionen der Biegemomente und der Normalkräfte sind wie folgt für das Ersatzsystem vorgegeben und auf der folgenden Seite dargestellt:

in Abhängigkeit von F für $X = 0$:

$M_F(x_1) = F\,[x_1 - l]$

$M_F(x_2) = 0$

$M_F(x_3) = 0$

$N_F(x_1) = 0$

$N_F(x_2) = -F$

$N_F(x_3) = 0$

in Abhängigkeit von X für $F = 0$:

$M_X(x_1) = X\,[3\,l - x_1]$

$M_X(x_2) = 2\,X\,l$

$M_X(x_3) = X\,[2\,l - x_1]$

$N_X(x_1) = 0$

$N_X(x_2) = X$

$N_X(x_3) = 0$

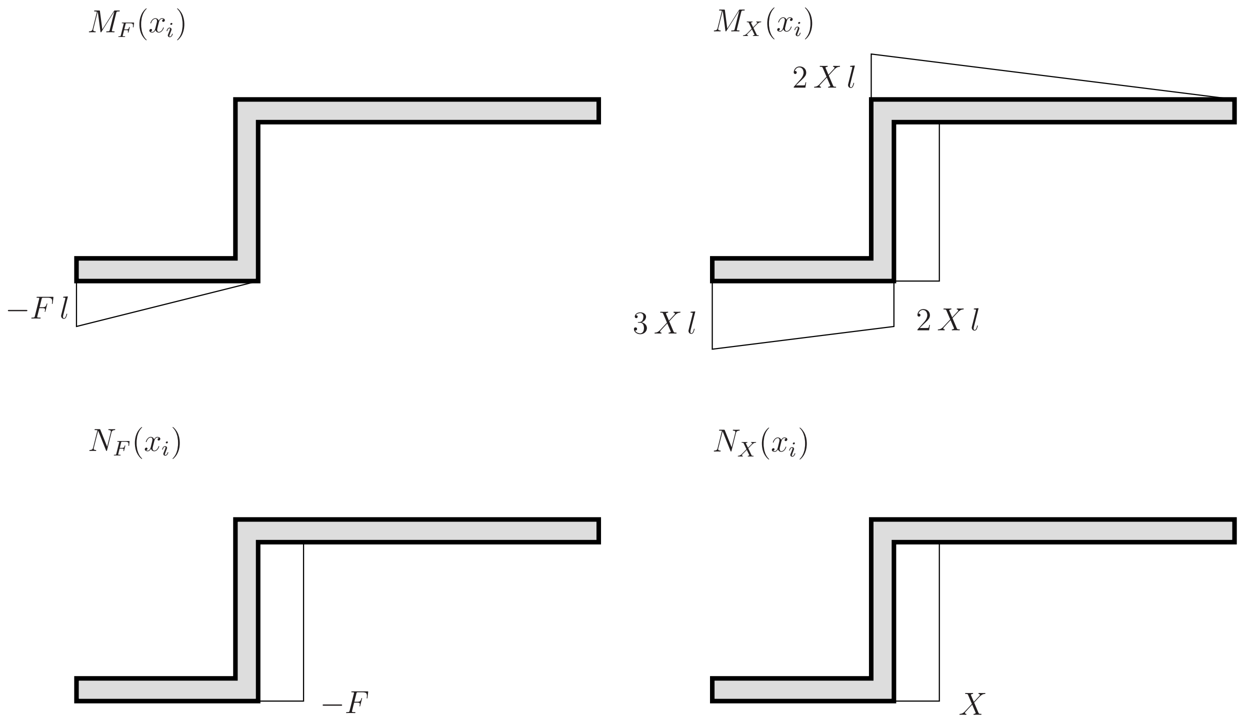
TU Dortmund
Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 5)



Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X. Tragen Sie dazu die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis in das **Kästchen auf der nachfolgenden Seite** ein. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. (**5,0 Punkte**)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 5 von 5)

Lösung zu Aufgabenteil b):

Berechnung mittels Einflusszahlen: $w_X = \alpha_{10} + X\,\alpha_{11} = 0$

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} &= \frac{-F\,l^2}{6\,EI}\,[2\,l + 2\cdot 3\,l] - \frac{F\,l}{EA} \quad \text{(Überlagerung vom } M_F \text{ mit } M_X \text{ und } N_F \text{ mit } N_X\text{)}\\
&= -\frac{4\,F\,l^3}{3\,EI} - \frac{F\,l}{EA}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{l}{6\,EI}\,[2\cdot 3\,l\cdot 3\,l + 2\cdot 2\,l\cdot 2\,l + 3\,l\cdot 2\,l + 2\,l\cdot 3\,l] \quad \text{Trapez mit Trapez}\\
&+ \frac{l}{EI}\,[2\,l\cdot 2\,l] \quad \text{Rechteck mit Rechteck}\\
&+ \frac{2\,l}{3\,EI}\,[2\,l\cdot 2\,l] \quad \text{Dreieck mit Dreieck}\\
&+ \frac{l}{EA} \quad \text{Rechteck mit Rechteck}\\
&= \frac{13\,l^3}{EI} + \frac{l}{EA}
\end{aligned}$$

$$X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = F\,\left[\frac{4\,l^3}{3\,EI} + \frac{l}{EA}\right] \Big/ \left[\frac{13\,l^3}{EI} + \frac{l}{EA}\right]$$