TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

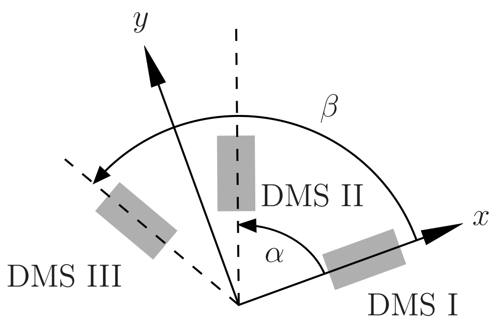
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Bei der Messung eines belasteten Blechs wurden drei Dehnungs-Messstreifen (DMS) verwendet und wie rechts dargestellt appliziert. Die Dehnungen der entsprechenden DMS wurden zu ε_{I}, $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ und $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ bestimmt. Der daraus resultierende Dehnungs- und Spannungszustand wurde unter Voraussetzung eines **ebenen Spannungszustands** berechnet. Das Material kann als linear elastisch und isotrop angesehen werden. Im Laufe der Zeit sind einige Daten verloren gegangen, sodass diese nun aus den noch bestehenden Daten reproduziert werden sollen.



a)

Aus den Aufzeichnungen des damaligen Versuchs gehen folgende Größen als gegeben hervor: α, β, ε_{yy}, $\varepsilon_{\mathrm{III}}$, die Schubspannung τ_{xy} sowie der Schubmodul G. Berechnen Sie aus diesen Vorgaben die Größen ε_{I}, $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ und ε_{xx}. **(3,5 Punkte)**

Hinweis: Es gelte $\alpha = \pi/2$, ansonsten sind alle Ergebnisse in symbolischer Form anzugeben!

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \varepsilon_{xx}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{II}} = \varepsilon_{yy}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{2\,\varepsilon_{\mathrm{III}} + \varepsilon_{yy}[\cos(2\,\beta) - 1] - \frac{\tau_{xy}}{G}\sin(2\,\beta)}{1 + \cos(2\,\beta)}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Einige der zunächst verloren gegangenen Daten konnten wiedergefunden werden. Für die Dehnungen wurden $\varepsilon_{xx} = 0,00125$ sowie $\varepsilon_{yy} = -0,00075$ ermittelt, die Querkontraktion des Materials betrug $\nu = 0,33$ und für die Spannung σ_{xx} wurde im betrachteten Punkt des Blechs der Wert 320 MN/m^2 berechnet. Berechnen Sie aus diesen Vorgaben die Spannungen σ_{yy} und σ_{zz} sowie die Dehnung ε_{zz} und den Wert des Elastizitätsmoduls E. **(4,0 Punkte)**

Hinweis: Die Ergebnisse sind hier in numerischer Form (ggf. mit mindestens drei relevanten Nachkommastellen ungleich Null) mit entsprechenden Einheiten anzugeben!

$\sigma_{yy} = -107,731 \text{ MN/m}^2$ $\qquad$ $\sigma_{zz} = 0$

$\varepsilon_{zz} = -0,000246269$ $\qquad$ $E = 284440 \text{ MN/m}^2$

Nun wird behauptet, dass bei dem damaligen Versuch die Dehnung ε_{zz} zu $-0{,}0003$ bestimmt wurde und der oben angegebene Wert für ν fraglich erscheint. Berechnen Sie den daraus resultierenden Wert ν^{neu} unter der Annahme, dass die Werte für ε_{xx}, ε_{yy} korrekt sind. Geben Sie eine eindeutig nachvollziehbare Begründung dafür an, ob die Behauptung widerlegt werden muss oder nicht. **(1,5 Punkte)**

$\nu^{\text{neu}} = 0,375$

Der Wert $\nu^{\text{neu}} = 0,375$ ist plausibel, da für die Querkontraktionszahl $0 < \nu \leq 0,5$ gilt. Damit muss die Behauptung nicht widerlegt werden.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)

In der Mechanik B wurde eine lineare Theorie hergeleitet und angewandt. Erläutern Sie, was die grundlegenden Annahmen dieser linearen Theorie sind und geben Sie (mit Begründung) Beispiele für Systeme an, die mit der linearen Theorie nicht mehr behandelt werden können. (**1,0 Punkte**)

Die grundlegenden Annahmen der linearen Theorie sind:

- Annahme kleiner Verformungen des Systems, lineare Kinematik, sprich, Dehnungen hängen linear von den Gradienten der Verschiebungen ab.
- Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen ist durch eine lineare Funktion gegeben.

Beispiel: Umformprozesse, weil dort große Verformungen auftreten und die Annahme von linearer Kinematik nicht mehr gültig ist.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

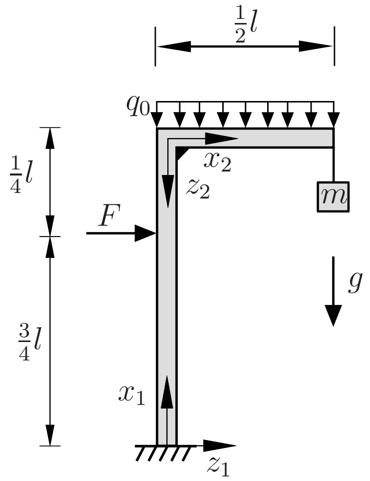
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

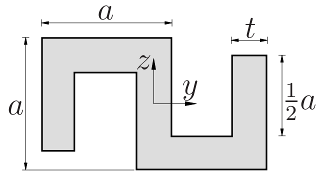
a)
Das nebenstehende System besteht aus einem abgeknickten, dehnstarren Biegebalken, dessen Ecke als biegestarr anzunehmen ist. An einem Ende ist eine Masse m durch ein Seil mit dem Balken verbunden. Weitere Lasten werden durch eine konstante Streckenlast q_0, sowie eine Einzellast F aufgeprägt.



Nennen Sie sämtliche kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen, welche zur eindeutigen Bestimmung der Biegelinien w in z-Richtung benötigt werden. **(3,0 Punkte)**

$$
\begin{aligned}
w_I(x_1 = 0) &= 0\,, \\
w_I'(x_1 = 0) &= 0\,, \\
w_I(x_1 = \frac{3}{4}l) &= w_{II}(x_1 = \frac{3}{4}l)\,, \\
w_I'(x_1 = \frac{3}{4}l) &= w_{II}(x_1 = \frac{3}{4}l)\,, \\
w_{III}(x_2 = 0) &= 0\,, \\
w_{III}'(x_2 = 0) &= w_{II}'(x_1 = l)\,.
\end{aligned}
$$

b)
Berechnen Sie für das abgebildete, zum Ursprung des eingezeichneten Koordinatensystems punktsymmetrische Profil (konstante Profildicke t) das Flächenträgheitsmoment I_{yy}. Fassen Sie einzelne Terme **nicht** zusammen.



(1,5 Punkte)

$$
I_{yy} = \frac{t\left[a-2t\right]^3}{12} + 2\left[\frac{at^3}{12} + at\left[\frac{a}{2}-t\right]^2\right] + 2\left[\frac{t\left[\frac{a}{2}-t\right]^3}{12} + t\left[\frac{a}{2}-t\right]\left[\frac{a}{2}-t-\frac{a}{4}\right]^2\right]
$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

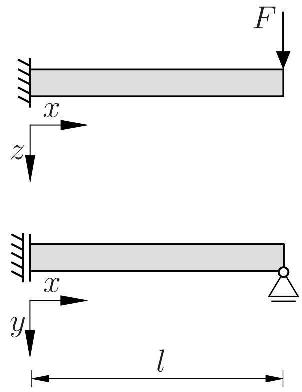
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

Nennen Sie eine hinreichende, geometrische Bedingung, welche erfüllt sein muss damit das Flächenträgheitsmoment I_{yz} verschwindet. (**0,5 Punkte**)

Querschnitt muss zu einer der zwei Achsen symmetrisch sein.

c)
Das abgebildete System (Vorderansicht und Draufsicht), welches aus einem Balken (Elastitzitätsmodul E) besteht, wird durch eine Kraft F in z Richtung belastet.



Geben Sie die kinematischen Randbedingungen an, welche zur eindeutigen Bestimmung der Biegelinien $w(x)$ in z- und $v(x)$ in y-Richtung benötigt werden. (**1,0 Punkte**)

$$
\begin{aligned}
w(x=0) &= 0\,,\\
w'(x=0) &= 0\,,\\
v(x=l) &= 0\,,\\
v'(x=0) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

Bestimmen Sie die Biegelinien $w(x)$, sowie $v(x)$ für $0 < x < l$ ohne Berechnung der auftretenden Konstanten. Nehmen Sie dazu an, dass der Querschnitt des Balkens unsymmetrisch bezüglich der y- und z-Achse ist. **(3,0 Punkte)**

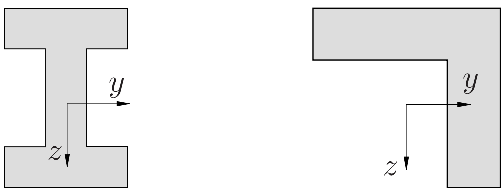
$$M_y = F\,[x - l]\,, \qquad \Delta = I_y\, I_z - I_{yz}^2\,,$$

$$E\Delta\, w'' = -\, I_z\, M_y(x)\,, \qquad E\Delta\, v'' = I_{yz}\, M_y(x)\,,$$

$$\Rightarrow \quad w' = -\,\frac{I_z}{E\Delta}\left[F\left[\frac{1}{2}x^2 - lx\right] + A\right]\,,$$

$$\Rightarrow \quad w = -\,\frac{I_z}{E\Delta}\left[F\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}lx^2\right] + Ax + B\right]\,, \qquad v = -\,\frac{I_{yz}}{E\Delta}\left[F\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}lx^2\right] + Cx + D\right]\,.$$

Es seien nun die dargestellten Profile vorgegeben.



Der Doppel-T-Träger (links) hat folgende Flächenträgheitsmomente:

$$I_{yy} = \frac{92}{3}\,\text{mm}^4\,, \qquad I_{zz} = \frac{5}{3}\,\text{mm}^4\,, \qquad I_{yz} = 0\,\text{mm}^4\,.$$

Für das L-Profil (rechts) gelten die Werte:

$$I_{yy} = 39\,\text{mm}^4\,, \qquad I_{zz} = 39\,\text{mm}^4\,, \qquad I_{yz} = -\,1,4\,\text{mm}^4\,.$$

Geben Sie an, welches Profil unter der aktuellen Belastung zu kleineren Auslenkungen in z-, bzw. y-Richtung führt.
Hinweis: Geben Sie nachvollziehbare Begründungen an. Gegebenenfalls sind auch Rechnungen notwendig. **(1,0 Punkte)**

Kleinstes v: Doppel-T Träger, da $I_{yz} = 0$
kleinstes w:

$$\frac{I_z}{\Delta^{\mathrm{T}}} = 0.0326\,, \qquad \frac{I_z}{\Delta^{\mathrm{L}}} = 0.0256\,.$$

Da beide Balken gleich belastet werden und das gleiche E-Modul haben, hängt die Auslenkung nur von $\frac{I_z}{\Delta}$ ab, s.o.. Somit erfährt der L-Träger die kleinste Auslenkung in w.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

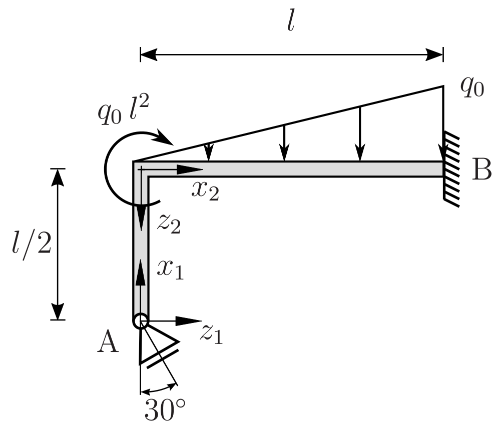
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

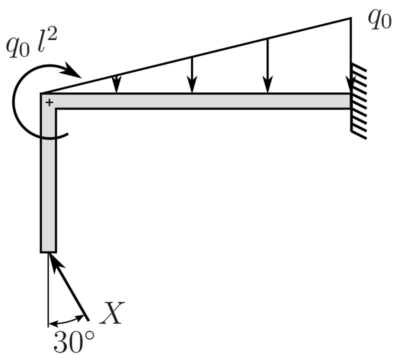
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 5)

Der auf der linken Seite dargestellte Rahmen (Biegesteifigkeit EI) ist wie dargestellt gelagert und belastet. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit der statisch überzähligen Auflagerkraft X vorgegeben. Anteile aus Normal- und Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen.

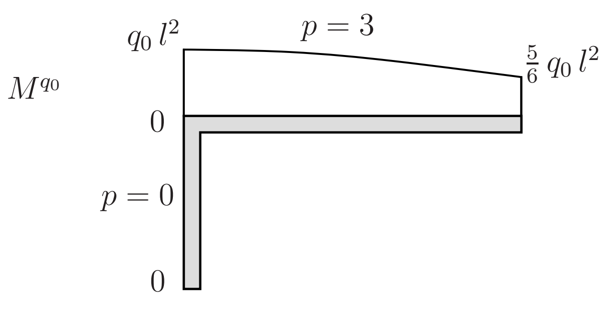


Ersatzsystem:



a)

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M^{q_0} des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von q_0 und für $X = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus den jeweiligen Polynomgrad der Funktion an. (**1,0 Punkte**)



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

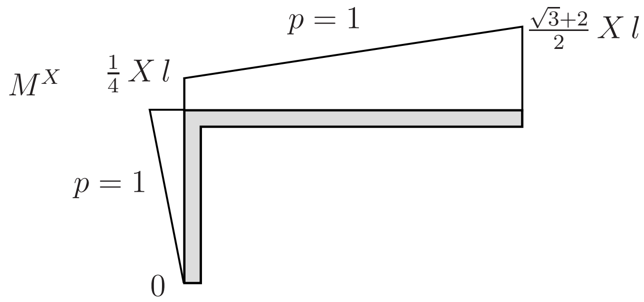
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 5)

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M^X des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von X und für $q_0 = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus den jeweiligen Polynomgrad der Funktion an. **(1,5 Punkte)**



Geben Sie die im System gespeicherte Gesamtenergie Π als Summe einzelner (nicht zu vernachlässigender) Integrale an. Geben Sie dabei die konkreten Integrationsgrenzen an und verwenden Sie die allgemeinen Ausdrücke M^{q_0} sowie M^X für die Schnittgrößenfunktionen. Die tatsächlichen Funktionen der Schnittgrößen sollen hier **nicht** eingesetzt werden. **(1,5 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{l/2} \frac{\left[\, M^X(x_1)\,\right]^2}{EI}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l} \frac{\left[\, M^{q_0}(x_2) + M^X(x_2)\,\right]^2}{EI}\,\mathrm{d}x_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

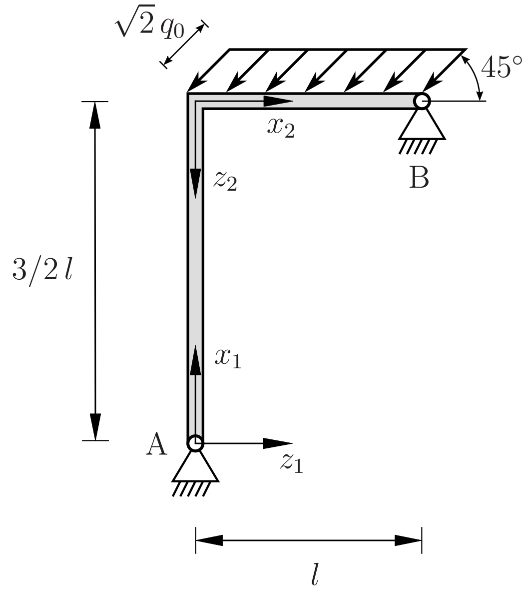
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

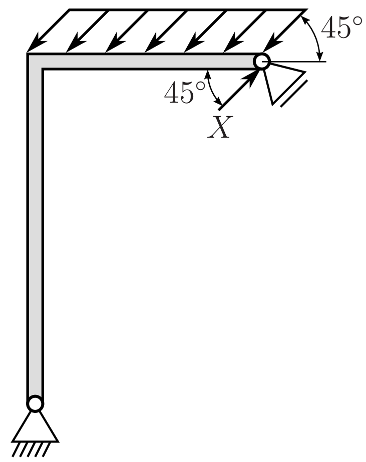
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 5)

b)
Der unten abgebildete Rahmen (Dehnsteifigkeit EA, Biegesteifigkeit EI) ist in den Punkten A und B wie dargestellt gelagert und belastet. Die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen. Im rechten Bild wurde die statisch überzählige Kraft X wie eingezeichnet gewählt. Diese soll im Folgenden bestimmt werden.



Ersatzsystem:



Die Funktionen der Biegemomente und der Normalkraft sind wie folgt für das Ersatzsystem vorgegeben:

in Abhängigkeit von q_0 für $X = 0$:

$$M^{q_0}(x_1) = -\frac{3}{5}\, q_0\, l\, x_1$$
$$N^{q_0}(x_1) = -\frac{7}{5}\, q_0\, l$$
$$M^{q_0}(x_2) = -\frac{q_0}{2}\, x_2^2 + \frac{7}{5}\, q_0\, l\, x_2 - \frac{9}{10}\, q_0\, l^2$$
$$N^{q_0}(x_2) = -\frac{3}{5}\, q_0\, l + q_0\, x_2$$

in Abhängigkeit von X für $q_0 = 0$:

$$M^X(x_1) = \frac{2\sqrt{2}}{5}\, X\, x_1$$
$$N^X(x_1) = \frac{3\sqrt{2}}{5}\, X$$
$$M^X(x_2) = \frac{3\sqrt{2}}{5}\, X\, [\, l - x_2\,]$$
$$N^X(x_2) = \frac{2\sqrt{2}}{5}\, X$$

Auf der folgenden Seite finden Sie die skizzierten Verläufe inklusive der jeweiligen Funktionswerte an den Bereichsgrenzen sowie die Aufgabenstellung.

TU Dortmund

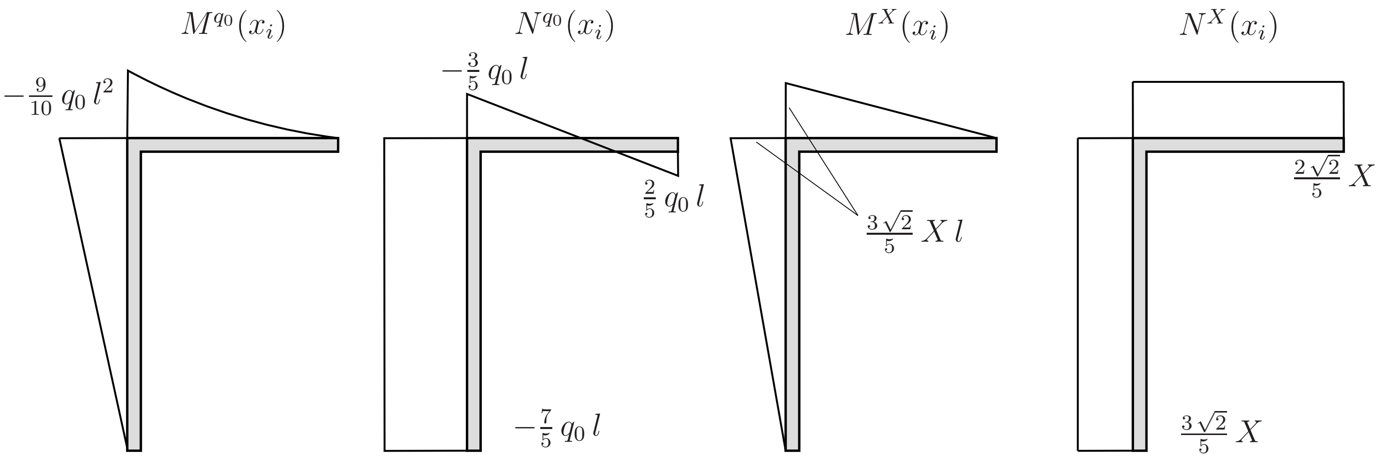
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

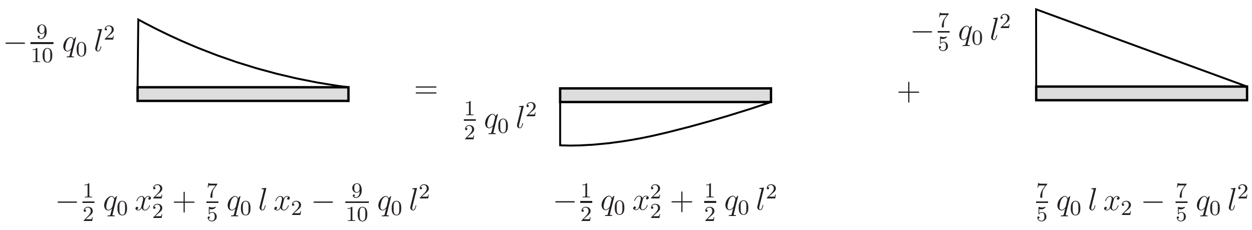
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 5)



Hinweis: Der Momentenverlauf $M^{q_0}(x_2)$ lässt sich additiv wie folgt zerlegen



Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X. Tragen Sie dazu die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis in das Kästchen auf der nachfolgenden Seite ein. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. Berücksichtigen Sie hierbei, dass das Verhältnis zwischen der Biege- und Dehnsteifigkeit zu $EI = EA\,l^2$ gegeben ist. **(6,0 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 5 von 5)

Lösung zu Aufgabenteil b):

Anwendung des Satzes von Castigliano:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0 \\
&= \underbrace{\int_0^{3l/2} \frac{\left[M^X(x_1) + M^{q_0}(x_1) \right]}{EI} \frac{\partial M^X(x_1)}{\partial X} \, \mathrm{d}x_1 + \int_0^{3l/2} \frac{\left[N^X(x_1) + N^{q_0}(x_1) \right]}{EA} \frac{\partial N^X(x_1)}{\partial X} \, \mathrm{d}x_1}_{I.} \\
&+ \underbrace{\int_0^{l} \frac{\left[M^X(x_2) + M^{q_0}(x_2) \right]}{EI} \frac{\partial M^X(x_2)}{\partial X} \, \mathrm{d}x_2 + \int_0^{l} \frac{\left[N^X(x_2) + N^{q_0}(x_2) \right]}{EA} \frac{\partial N^X(x_2)}{\partial X} \, \mathrm{d}x_2}_{II.}
\end{aligned}
$$

Die Integrale werden mit Hilfe von Koppeltabellen gelöst. Hierfür sind die Schnittgrößenverläufe auf Seite 4 mit Randwerten angegeben:

$$
\begin{aligned}
0 &= \underbrace{\frac{\frac{3}{2}l \quad \frac{-9}{10} q_0 l^2 \quad \frac{3\sqrt{2}}{5} l}{3\,EI} + \frac{\frac{3}{2}l \quad \frac{3\sqrt{2}}{5} X\,l \quad \frac{3\sqrt{2}}{5} l}{3\,EI}}_{I.} \\
&+ \underbrace{\frac{\frac{3}{2}l \quad \frac{-7}{5} q_0 l \quad \frac{3\sqrt{2}}{5}}{EA} + \frac{\frac{3}{2}l \quad \frac{3\sqrt{2}}{5} X \quad \frac{3\sqrt{2}}{5}}{EA}}_{I.} \\
&+ \underbrace{\frac{5\,l \quad \frac{1}{2} q_0 l^2 \quad \frac{3\sqrt{2}}{5} l}{12\,EI} + \frac{l \quad \frac{-7}{5} q_0 l^2 \quad \frac{3\sqrt{2}}{5} l}{3\,EI} + \frac{l \quad \frac{3\sqrt{2}}{5} X\,l \quad \frac{3\sqrt{2}}{5} l}{3\,EI}}_{II.} \\
&+ \underbrace{\frac{l \quad \left[\frac{-3}{5} + \frac{2}{5} \right] q_0 l \quad \frac{2\sqrt{2}}{5}}{2\,EA} + \frac{l \quad \frac{2\sqrt{2}}{5} X \quad \frac{2\sqrt{2}}{5}}{EA}}_{II.} \\
&= -\frac{69}{20\sqrt{2}\,EA} q_0 l^2 + \frac{2}{EA} X\,l
\end{aligned}
$$

Umstellen nach X liefert:

$$
X = \frac{69\sqrt{2}}{80} q_0 l = 1.2198\, q_0 l
$$